C.1

1. Pour que ce quotient soit définit, il faut que son dénominateur soit non-nul ; cherchons les valeurs annulant le dénominateur :
$e^x - 1 = 0 \implies e^x = 1 \implies x = 0$

L'ensemble de définition est :
$\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$

2. La fonction f est écrite sous la forme $\dfrac{1}{u}$ où :
$u(x) = e^x - 1 \quad ; \quad u'(x) = e^x$
La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2} = -\frac{e^x}{\big(e^x - 1\big)^2}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur de la fonction est strictement positif ; on en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\mathcal{D}$: la fonction f est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

On a les limites suivantes :

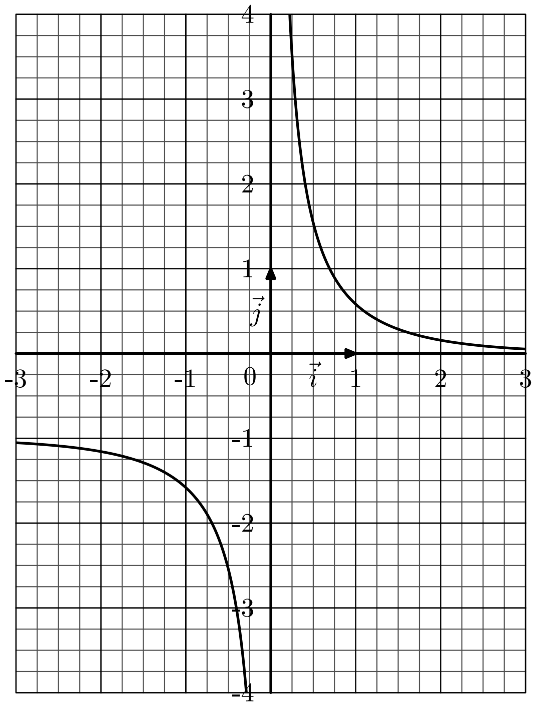
- $\lim_{x\mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto -\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = -1$
- $\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto +\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = 0$
- $\lim_{x\mapsto 0^-} f(x) = \lim_{x\mapsto 0^-} \dfrac{1}{e^x - 1} = -\infty$
- $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x\mapsto 0^+} \dfrac{1}{e^x - 1} = +\infty$

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3. La courbe $\mathscr{C}$ possède de trois asymptotes :
- Une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=0$.
- Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=-1$.
- Une asymptote verticale d'équation $x=0$.

4. Voici le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.



C.2

1.
- On a les deux limites :
$\lim_{n\mapsto -\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\mapsto -\infty} e^{-x} = +\infty$
On en déduit la limite :
$\lim_{n\mapsto -\infty} f(x) = \lim_{n\mapsto +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = +\infty$
- Pour tout entier naturel n, on a la limite :
$\lim_{n\mapsto +\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$
On en déduit : $\lim_{n\mapsto +\infty} f(x) = \lim_{n\mapsto +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = 0$

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v où :
$u(x) = x^2 \quad ; \quad v(x) = e^{-x}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 2x \quad ; \quad v'(x) = -e^{-x}$

La formule de dérivation d'un produit donne l'expression de f' :
$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \big(-e^{-x}\big)$$
$$= 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \cdot \big(2 - x\big)$$

La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a les deux images suivantes par la fonction f :
- $f(0) = 0^2 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$
- $f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = 4 \cdot e^{-}2$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

3. D'après le tableau de variations de la fonction f, 0 est un minimum global : on en déduit que la fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

